Strategie matematiche per vincere AL gioco d'azzardo

Ernesto De Vito

Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Liceo Fermi - 12 febbraio 2019

Strategie matematiche per vincere IL gioco d'azzardo

Ernesto De Vito

Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Liceo Fermi - 12 febbraio 2019

Prologo

Tra i giocatori d'azzardo ci sono anche persone "intelligenti"

Prologo

Tra i giocatori d'azzardo ci sono anche persone "intelligenti"

- Fëdor Dostoevskij scrisse nel 1866 il libro *Il giocatore*, considerato uno dei capolavori della letteratura russa, per pagare i debiti di gioco.

Prologo

Tra i giocatori d'azzardo ci sono anche persone "intelligenti"

- Fëdor Dostoevskij scrisse nel 1866 il libro *Il giocatore*, considerato uno dei capolavori della letteratura russa, per pagare i debiti di gioco.
- Vittorio De Sica accettò di fare pellicole di minor valore per pagare i debiti di gioco e la sua passione per l'azzardo ispirò il film "Il Conte Max".

Prologo

Tra i giocatori d'azzardo ci sono anche persone "intelligenti"

- Fëdor Dostoevskij scrisse nel 1866 il libro *Il giocatore*, considerato uno dei capolavori della letteratura russa, per pagare i debiti di gioco.
- Vittorio De Sica accettò di fare pellicole di minor valore per pagare i debiti di gioco e la sua passione per l'azzardo ispirò il film "Il Conte Max".
- George Clooney è un forte giocatore ed è stato protagonista di due film "Ocean's Eleven" e "Ocean's Twelve" basati sul gioco d'azzardo.

I giochi d'azzardo

- **Gastone:** ovvero "fortuna" del giocatore
  roulette, lotto, slot machine, ...

I giochi d'azzardo

- **Gastone:** ovvero "fortuna" del giocatore
  roulette, lotto, slot machine, ...
- **Archimede:** ovvero "abilità" del giocatore
  poker, totocalcio, scommesse, ...

I giochi d'azzardo

- **Gastone:** ovvero "fortuna" del giocatore
  roulette, lotto, slot machine, ...
- **Archimede: ovvero "abilità" del giocatore**
  poker, totocalcio, scommesse, ...
- **Paperino:** ovvero "abilità" del banco
  gioco delle tre carte, tavolette, campanelle...
  video su YouTube
  https://www.youxtube.com/watch?v=KjBYHoYc02s

I giochi d'azzardo

- **Gastone:** ovvero "fortuna" del giocatore
  roulette, lotto, slot machine, ...
- **Archimede:** ovvero "abilità" del giocatore
  poker, totocalcio, scommesse, ...
- **Paperino:** ovvero "abilità" del banco
  gioco delle tre carte, tavolette, campanelle...
  video su YouTube
  https://www.youxtube.com/watch?v=KjBYHoYc02s

Due sicuri vincenti

Due sicuri vincenti

- Lo Stato italiano

MEF Ministero dell'Economia e delle Finanze

Due sicuri vincenti

- Lo Stato italiano

- Nel 2016 gli italiani hanno speso 95 miliardi nel gioco, di cui 49 miliardi in “slot machine” e lo Stato Italiano ha incassato 16 miliardi (la manovra finanziaria del 2018 è di 20 miliardi).

Due sicuri vincenti

Due sicuri vincenti

- Il proprietario di una sala giochi

Figura: dal “Corriere di Taranto”

Due sicuri vincenti

- Il proprietario di una sala giochi

Figura: dal “Corriere di Taranto”

- Le big del mercato delle new slot, delle lotterie e delle scommesse sportive in Italia sono dieci e rappresentano metà del fatturato, oltre 84 miliardi (2014), il 4% del Pil . Le prime due sono Lottomatica e Snai. Complessivamente la terza industria dopo Eni e Fiat.

Slot machine

- Le moderne slot machine si dividono in due categorie
    i) AWP (AmusementWithPrize): soprattutto nei bar
    ii) VLT (VideoLoTtery): solo nelle sale giochi

Slot machine

- Le moderne slot machine si dividono in due categorie
  i) AWP (AmusementWithPrize): soprattutto nei bar
  ii) VLT (VideoLoTtery): solo nelle sale giochi
- Le AWP sono state autorizzate a partire dal 1995. Il Decreto Abruzzo del 2009 autorizza le VLT.

Slot machine

- Le moderne slot machine si dividono in due categorie
  i) AWP (AmusementWithPrize): soprattutto nei bar
  ii) VLT (VideoLoTtery): solo nelle sale giochi
- Le AWP sono state autorizzate a partire dal 1995. Il Decreto Abruzzo del 2009 autorizza le VLT.
- Un terzo di tutte le slot sono in Italia: 418 mila slot machine, 3 ogni bar, una ogni 143 abitanti.

Slot machine

- Le moderne slot machine si dividono in due categorie
    i) AWP (AmusementWithPrize): soprattutto nei bar
    ii) VLT (VideoLoTtery): solo nelle sale giochi
- Le AWP sono state autorizzate a partire dal 1995. Il Decreto Abruzzo del 2009 autorizza le VLT.
- Un terzo di tutte le slot sono in Italia: 418 mila slot machine, 3 ogni bar, una ogni 143 abitanti.
- In Liguria ci sono 7 slot machine ogni 1000 abitanti (9^a regione in Italia).

Un problema sociale

R.it | Cronaca

L'Italia delle slot. Ecco quanto giocano gli italiani: in un anno l'azzardo si mangia 5 miliardi in più

Gratta e vinci, lotterie, superenalotto, scommesse sportive, lotto, macchinette, gioco online, ippica, bingo: la raccolta per l'azzardo nel 2017 è aumentata di più di 5 miliardi di euro dall'anno precedente. Stabile il giocato per le slot, avanzano nuove modalità di gioco, mentre gli abruzzesi sono quelli che giocano di più in Italia. Tutti i dati nell'inchiesta del gruppo Gedi

di DANIELE TEMPERA

Stampa

Figura: da "Repubblica"

La dea bendata

- Fortuna e sfortuna, incertezza e previsione

La dea bendata

- Fortuna e sfortuna, incertezza e previsione
- Il caso: fenomeno casuale, aleatorio, randomico

La dea bendata

- Fortuna e sfortuna, incertezza e previsione
- Il caso: fenomeno casuale, aleatorio, randomico
- Probabilità e Matematica

Uno spettro si aggira per la scuola

LA PROBABILITÀ

Bertrand Russell, 1929

The probability is the most important concept in modern science

LA PROBABILITÀ

Bertrand Russell, 1929

The probability is the most important concept in modern science especially as nobody has the slightest notion what it means.

Un esperimento

In quale delle due immagini i punti sono distribuiti a caso ?

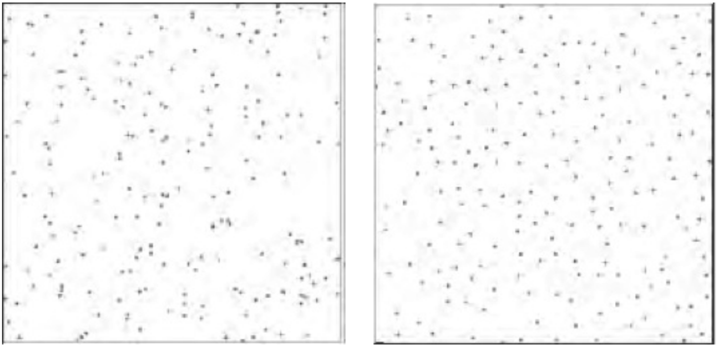


Figura: Fonte: Geoff Cumming, *Understanding The New Statistics*

Nel mondo reale

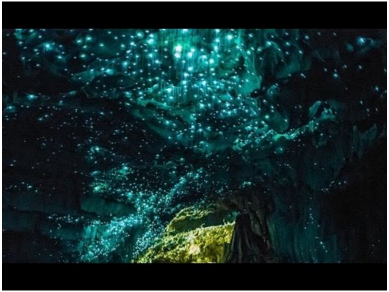
 

Figura: cielo stellato (sinistra) lucciole (glowworm) (destra)

Ispirato dal libro “Glow, Big Glowworm” di Stephen Jay Gould.

Lancio di una moneta equilibrata

- Gioco 10 €= **posta**

Lancio di una moneta equilibrata

- Gioco 10 €= **posta**
- se esce Testa il banco mi dà 19˙€detta **vincita** (=1.9 volte la posta)

Lancio di una moneta equilibrata

- Gioco 10 €= **posta**
- se esce Testa il banco mi dà 19˙€detta **vincita** (=1.9 volte la posta)
- se esce Croce perdo la posta

Lancio di una moneta equilibrata

- Gioco 10 €= **posta**
- se esce Testa il banco mi dà 19˙€detta **vincita** (=1.9 volte la posta)
- se esce Croce perdo la posta
- Probabilità di successo

$$\mathbb{P}\left[\text{Testa}\right] = 50\%$$

Lancio di una moneta equilibrata

- Gioco 10 €= **posta**
- se esce Testa il banco mi dà 19˙€detta **vincita** (=1.9 volte la posta)
- se esce Croce perdo la posta
- Probabilità di successo

$$\mathbb{P}\,[\text{Testa}] = 50\%$$

- Vincita

$$V = \begin{cases} +\,0 - 10 & \text{se Croce} \\ +19 - 10 & \text{se Testa} \end{cases} = \begin{cases} -10 & \text{se Croce} \\ +\,9 & \text{se Testa} \end{cases}$$

Roulette francese

Roulette francese: rouge

- Gioco 10 €

Roulette francese: rouge

- Gioco 10 €
- se esce un numero rosso, il banco mi dà 20 €

Roulette francese: rouge

- Gioco 10 €
- se esce un numero rosso, il banco mi dà 20 €
- altrimenti perdo la posta.

Roulette francese: rouge

- Gioco 10 €
- se esce un numero rosso, il banco mi dà 20 €
- altrimenti perdo la posta.
- Probabilità di successo

$$\mathbb{P}[\text{rosso}] = 49\%$$

Roulette francese: rouge

- Gioco 10 €
- se esce un numero rosso, il banco mi dà 20 €
- altrimenti perdo la posta.
- Probabilità di successo

$$\mathbb{P}[\text{rosso}] = 49\%$$

- Vincita:

$$V = \begin{cases} +\ 0 - 10 & \text{no rosso} \\ +20 - 10 & \text{rosso} \end{cases} = \begin{cases} -10 & \text{no rosso} \\ +10 & \text{rosso} \end{cases}$$

Fenomeni casuali ed eventi

- **Fenomeno casuale:** ogni situazione che, ripetuta nelle stesse condizioni, produce risultati diversi

$$\Omega = \{\text{insieme dei possibili risultati}\}$$

$$\Omega = \{T, C\} \qquad \Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$$

Fenomeni casuali ed eventi

- **Fenomeno casuale:** ogni situazione che, ripetuta nelle stesse condizioni, produce risultati diversi

$$\Omega = \{\text{insieme dei possibili risultati}\}$$

$$\Omega = \{T, C\} \qquad \Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$$

- **Evento**: l'insieme di uno o più risultati possibili

$$E = \{\text{Testa}\} = \{T\}$$
$$E = \{1, \ldots 9, 12, \ldots, 18, 19, \ldots, 27, 30, \ldots, 36\}$$

Probabilità di un evento

- **Probabilità** di un evento E

$$\mathbb{P}[E] = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} \quad 0 \leqslant \mathbb{P}[E] \leqslant 1$$

$$\mathbb{P}[\text{non } E] = \frac{\text{numero casi sfavorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = 1 - \mathbb{P}[E]$$

se i casi possibili sono tutti equiprobabili.

Probabilità di un evento

- **Probabilità** di un evento E

$$\mathbb{P}[E] = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} \quad 0 \leqslant \mathbb{P}[E] \leqslant 1$$

$$\mathbb{P}[\text{non } E] = \frac{\text{numero casi sfavorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = 1 - \mathbb{P}[E]$$

se i casi possibili sono tutti equiprobabili.

$$\mathbb{P}[T] = \frac{1}{2} = 50\% \qquad \mathbb{P}[C] = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}[\text{rosso}] = \frac{18}{18 + 18 + 1} = \frac{18}{37} \simeq 0,49 = 49\%$$

$$\mathbb{P}[\text{no rosso}] = \frac{19}{37} = 1 - \frac{18}{37}$$

Speranza (di vincita)

- **Speranza** o valor medio della “vincita”

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V] &= (\text{vincita} - \text{posta}) \times \mathbb{P}[\text{vinco}] - \text{posta} \times \mathbb{P}[\text{perdo}] \\ &= v_1 \times \mathbb{P}[1] + v_0 \times \mathbb{P}[0]\end{aligned}$$

$$V = \begin{cases} v_0 & \text{perdo} \\ v_1 & \text{vinco} \end{cases}$$

Esempi

- Testa/Croce

$$\mathbb{E}\left[V\right] = (19 - 10) \times \frac{1}{2} - 10 \times \frac{1}{2} = -0,5$$

Esempi

- Testa/Croce

$$\mathbb{E}\left[V\right] = (19-10) \times \frac{1}{2} - 10 \times \frac{1}{2} = -0,5$$

- "Rouge" alla roulette francese

$$\mathbb{E}\left[V\right] = (20-10) \times \frac{18}{37} - 10 \times \frac{19}{37} = -\frac{10}{37} = -0,27$$

Esempi

- Testa/Croce

$$\mathbb{E}[V] = (19 - 10) \times \frac{1}{2} - 10 \times \frac{1}{2} = -0,5$$

- "Rouge" alla roulette francese

$$\mathbb{E}[V] = (20 - 10) \times \frac{18}{37} - 10 \times \frac{19}{37} = -\frac{10}{37} = -0,27$$

- Slot machine (giocando 10 € con payout 85%)

$$\mathbb{E}[V] = -1.5$$

Cosa significa "Probabilità"

- **Frequenza assoluta e relativa**
  Se lanciamo ripetutamente una moneta

$$\text{frequenza assoluta} = \text{numero teste}$$
$$\text{frequenza relativa} = \frac{\text{numero teste}}{\text{numero lanci}}$$

Cosa significa "Probabilità"

- **Frequenza assoluta e relativa**
  Se lanciamo ripetutamente una moneta

$$\text{frequenza assoluta} = \text{numero teste}$$
$$\text{frequenza relativa} = \frac{\text{numero teste}}{\text{numero lanci}}$$

- **Legge dei grandi numeri**: Se il numero dei lanci è grande

$$\mathbb{P}\left[\text{Testa}\right] \simeq \text{frequenza relativa}$$

Esperimento: Testa e Croce

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	T	C	T	T	T	T	C	C	T	C
10	C	C	C	C	T	C	T	C	C	C
20	C	T	C	C	C	T	T	T	T	T
30	C	C	C	T	C	C	T	C	C	T
40	T	T	C	T	C	C	C	T	C	T
50	C	T	C	C	T	C	T	T	C	C
60	C	T	C	C	C	C	C	C	C	C
70	T	C	T	T	T	C	C	T	T	T
80	C	C	C	C	C	T	C	T	T	T
90	T	C	C	T	C	T	T	T	T	T
Testa	45									
Croce	55									
Totale	100									
Rapporto	0,45									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	C	T	T	T	T	C	T	T	T	T
10	T	T	T	T	C	T	T	T	C	C
20	T	T	T	C	T	C	T	T	T	T
30	T	C	T	T	C	T	C	T	C	C
40	T	T	C	C	C	C	C	T	C	C
50	C	T	T	C	T	T	C	T	C	T
60	C	C	T	C	T	C	T	T	C	T
70	T	T	C	T	C	T	C	C	C	C
80	T	T	T	T	C	C	C	T	C	T
90	C	C	T	C	T	T	T	C	C	T
Testa	57									
Croce	43									
Totale	100									
Rapporto	0,57									

Figura: 100 lanci ripetuti da 1000 persone

Esperimento

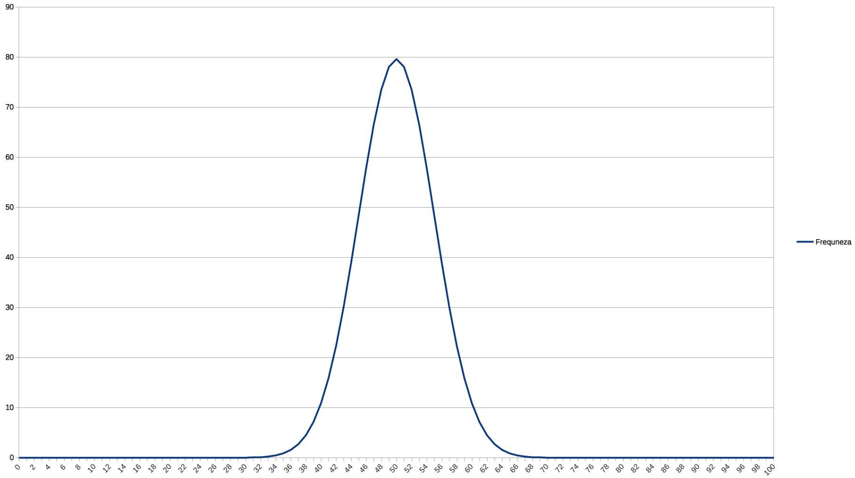


Figura: 100 lanci ripetuti da 1000 persone

Cosa significa "Speranza"

Ritorniamo al lancio della moneta e ricordiamo che

$$\mathbb{E}[V] = +9 \times \mathbb{P}[T] - 10 \times \mathbb{P}[C]$$

$$V = \begin{cases} -10 & \text{se Croce} \\ +9 & \text{se Testa} \end{cases}$$

allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V] \times \text{lanci} &\simeq 9 \times \text{numero Teste} - 10 \times \text{numero Croci} \\ &= \text{“bilancio”} \end{aligned}$$

Il giocatore perde sempre

Se giochiamo 100 volte (capitale iniziale 1000 €)

- Testa/Croce

$$\text{“bilancio”} = (-0,5) \times 100 = -50\,€$$

Il giocatore perde sempre

Se giochiamo 100 volte (capitale iniziale 1000 €)

- Testa/Croce

$$\text{“bilancio”} = (-0,5) \times 100 = -50\,€$$

- “Rouge” alla roulette francese

$$\text{“bilancio”} = (-0,27) \times 100 = -27\,€$$

Il giocatore perde sempre

Se giochiamo 100 volte (capitale iniziale 1000 €)

- Testa/Croce

$$\text{“bilancio”} = (-0,5) \times 100 = -50\,€$$

- “Rouge” alla roulette francese

$$\text{“bilancio”} = (-0,27) \times 100 = -27\,€$$

- Slot machine (payout 85%)

$$\text{“bilancio”} = (-1,5) \times 100 = -150\,€$$

Le monete hanno memoria ?

Le monete hanno memoria ?

IL CASO A GENOVA | 08 ottobre 2016

Lotto, quella febbre del “53” che rovina le famiglie

Bruno Viani

COMMENTI (1) 163 Tweet G+1 0 LinkedIn 0 Pinterest 0 Email

ISCRIVITI Newsletter Il Secolo XIX

Genova - C’è un numero che aleggia, come un fantasma, sulla città dei giocatori. **Si chiama “53”,** non esce sulla ruota nazionale da un numero assolutamente illogico di estrazioni, ben 211 che è come dire il record assoluto da quando esiste il Lotto. E

I maggiori 10 Ritardatari Storici per singole ruote del Lotto Italiano

Naz.	numero	53	22	19	76	6	2	4	52	64	87
	ritardo	257	178	163	150	139	136	123	122	118	114
BA	numero	21	55	82	47	28	31	58	38	14	29
	ritardo	201	197	194	190	188	168	164	154	152	147
CA	numero	76	34	71	3	58	65	40	44	17	22
	ritardo	210	204	192	186	182	177	170	170	168	165
FI	numero	19	46	9	71	88	54	45	10	55	65
	ritardo	178	175	172	171	156	153	152	151	148	147
GE	numero	68	7	14	75	4	84	24	39	51	37
	ritardo	175	166	156	149	145	143	142	138	137	134
MI	numero	30	83	74	20	58	5	75	33	23	65
	ritardo	181	176	171	164	164	163	160	157	154	153

Ritorniamo alle monete

Tre serie di 10 lanci

T	C	C	C	C	C	C

C	T	T	T	T	T	T

Nella prima serie la Testa ha un "ritardo" di 6 estrazioni. Nella seconda serie la Croce ha un "ritardo" di 6 estrazioni.

Nella prossima estrazione scommettete su
Testa o Croce ?

Le monete non hanno memoria

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	C	C	T	T	T	T	T	C	T	C
10	C	C	T	C	C	T	C	C	C	C
20	T	T	T	T	C	T	T	T	T	T
30	T	C	T	C	C	C	C	C	T	C
40	C	T	C	T	T	C	T	T	C	T
50	T	C	C	C	T	C	C	C	T	C
60	T	C	T	T	C	C	T	T	T	C
70	C	T	T	C	T	T	C	C	T	C
80	C	T	T	C	T	T	T	T	T	T
90	C	C	T	C	C	C	C	C	C	T
Testa	50									
Croce	50									
Totale	100									
Rapporto	0,5									

Figura: 100 lanci

Regola del prodotto e della somma

- Due eventi E ed F sono **indipendenti** se la probabilità che E accade non è influenzata dal fatto che F si realizzi e viceversa.

Regola del prodotto e della somma

- Due eventi E ed F sono **indipendenti** se la probabilità che E accade non è influenzata dal fatto che F si realizzi e viceversa.
- Regola del prodotto per eventi indipendenti

$$\mathbb{P}\left[E \text{ ed } F\right] = \mathbb{P}\left[E\right] \times \mathbb{P}\left[F\right].$$

Regola del prodotto e della somma

- Due eventi E ed F sono **indipendenti** se la probabilità che E accade non è influenzata dal fatto che F si realizzi e viceversa.
- Regola del prodotto per eventi indipendenti

$$\mathbb{P}[E \text{ ed } F] = \mathbb{P}[E] \times \mathbb{P}[F].$$

- Due eventi E ed F sono **disgiunti** se E ed F non possono accadere insieme.

Regola del prodotto e della somma

- Due eventi E ed F sono **indipendenti** se la probabilità che E accade non è influenzata dal fatto che F si realizzi e viceversa.
- Regola del prodotto per eventi indipendenti

$$\mathbb{P}\left[E \text{ ed } F\right] = \mathbb{P}\left[E\right] \times \mathbb{P}\left[F\right].$$

- Due eventi E ed F sono **disgiunti** se E ed F non possono accadere insieme.
- Regola del somma per eventi disgiunti

$$\mathbb{P}\left[E \text{ o } F\right] = \mathbb{P}\left[E\right] + \mathbb{P}\left[F\right] \qquad \mathbb{P}\left[E \text{ ed } F\right] = 0.$$

Due lanci

Due volte la stessa moneta o una volta due monete

I	II	Totale Teste
T	T	2
T	C	1
C	T	1
C	C	0

$$
\begin{aligned}
E = \text{“Testa al primo lancio”} = & \quad \{TT, TC\} \\
F = \text{“Testa al secondo lancio”} = & \{TT, CT\} \\
E \text{ ed } F = \text{“Due teste in due lanci”} = & \qquad \{TT\}
\end{aligned}
$$

Probabilità

I	II	Totale Teste
T	T	2
T	C	1
C	T	1
C	C	0

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[E\right] &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}\left[F\right] &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}\left[E \text{ ed } F\right] &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Probabilità numero di Teste

I	II	Totale Teste	Probabilità
T	T	2	1/4
T	C	1	1/4
C	T	1	1/4
C	C	0	1/4

Totale teste	Probabilità
2	1/4
1	1/2
0	1/4

Ma se "Testa" è in ritardo al primo lancio

Se al primo lancio non esce Testa, allora è uscita Croce

I	II	Totale Teste	Probabilità
$\cancel{\text{T}}$	T	2	0
$\cancel{\text{T}}$	C	1	0
C	T	1	1/2
C	C	0	1/2

La probabilità che esca Testa al secondo lancio sapendo che al primo lancio è uscita Croce è

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}\left[\text{La seconda moneta è testa}\right] = \mathbb{P}\left[F\right].$$

Il lotto: numero secco su una ruota

- Ci sono 11 route, 10 associate a 10 città ed una nazionale

Il lotto: numero secco su una ruota

- Ci sono 11 route, 10 associate a 10 città ed una nazionale
- Per ciascun ruota, vengono estratti 5 numeri tra 90 (senza ripetizione)

Il lotto: numero secco su una ruota

- Ci sono 11 route, 10 associate a 10 città ed una nazionale
- Per ciascun ruota, vengono estratti 5 numeri tra 90 (senza ripetizione)
- **Numero secco su ruota fissata**: si scommette che un numero (ad esempio il “53”) esce su una data ruota (ad esempio quella Nazionale)

Probabilità di vincita

a) Casi possibili: 5 numeri tra 1 e 90 diversi

$$90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 = 5.273.912.160$$

Probabilità di vincita

a) Casi possibili: 5 numeri tra 1 e 90 diversi

$$90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 = 5.273.912.160$$

b) Casi favorevoli: cinque possibilità

$$\begin{aligned}
1^a : &\quad {\color{red}1} \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 = 5.859.9024 \\
2^a : &\quad 89 \times {\color{red}1} \times 88 \times 87 \times 86 = 5.859.9024 \\
3^a : &\quad 89 \times 88 \times {\color{red}1} \times 87 \times 86 = 5.859.9024 \\
4^a : &\quad 89 \times 88 \times 87 \times {\color{red}1} \times 86 = 5.859.9024 \\
5^a : &\quad 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times {\color{red}1} = 5.859.9024
\end{aligned}$$

Probabilità di vincita

c) Probabilità successo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\text{“53”}\right] &= \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} \\
&= 5 \times \frac{1 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86} \\
&= 5 \times \frac{1}{90} = \frac{1}{18} \simeq 0,056 = 5,6\%
\end{aligned}
$$

Probabilità di vincita

c) Probabilità successo

$$\mathbb{P}\left[\text{“53”}\right] = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$
$$= 5 \times \frac{{\color{red}1} \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}$$
$$= 5 \times \frac{1}{90} = \frac{1}{18} \simeq 0,056 = 5,6\%$$

d) Vincita: 112,3 € per 1 giocata da 10 €

Probabilità di vincita

c) Probabilità successo

$$\mathbb{P}\left[\text{“53”}\right] = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$
$$= 5 \times \frac{{\color{red}1} \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}$$
$$= 5 \times \frac{1}{90} = \frac{1}{18} \simeq 0,056 = 5,6\%$$

d) Vincita: 112,3 € per 1 giocata da 10 €

e) Se scommettiamo 10 €

$$\mathbb{E}\left[V\right] = (112,3 - 10) \times \frac{1}{18} - 10 \times \frac{17}{18}$$
$$= -\frac{67.7}{18} = -3.76$$

Il 53 manca da 257 estrazioni

- Probabilità che non esca in una estrazione

$$p_1 = \frac{89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85}{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86} = \frac{17}{18} = 1 - \frac{1}{18}$$

Il 53 manca da 257 estrazioni

- Probabilità che non esca in una estrazione

$$p_1 = \frac{89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85}{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86} = \frac{17}{18} = 1 - \frac{1}{18}$$

- Probabilità che non esca in due estrazione

$$p_2 = \frac{17}{18} \times \frac{17}{18} \qquad \text{regola del prodotto}$$

Il 53 manca da 257 estrazioni

- Probabilità che non esca in una estrazione

$$p_1 = \frac{89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85}{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86} = \frac{17}{18} = 1 - \frac{1}{18}$$

- Probabilità che non esca in due estrazione

$$p_2 = \frac{17}{18} \times \frac{17}{18} \qquad \text{regola del prodotto}$$

- Probabilità che non esca in 257 estrazioni

$$p_{257} = \left(\frac{17}{18}\right)^{257} \simeq 4,7\ 10^{-07} = \frac{47}{100.000.000}$$

Piccola, ma non zero

scala reale	$\simeq \frac{1}{650.000}$
Win for Life	$\simeq \frac{1}{1.850.000}$
no “53” in 257 estrazioni	$\simeq \frac{1}{2.130.000}$
“6” al SuperEnalotto	$\simeq \frac{1}{622.610.000}$

Piccola, ma non zero

scala reale	$\simeq \frac{1}{650.000}$
Win for Life	$\simeq \frac{1}{1.850.000}$
no “53” in 257 estrazioni	$\simeq \frac{1}{2.130.000}$
“6” al SuperEnalotto	$\simeq \frac{1}{622.610.000}$

Infatti è successo che

- il “53” sia in ritardo di 257 settimane;
- il “6” del superenalotto è uscito il 27 ottobre 2016 con un premio di 163.538.706 €in Calabria;
- il “6” del superenalotto è uscito il 30 ottobre 2010 con oltre 178 milioni di euro (giocata online).

Perché piccola ?

Prima o poi vinco: il raddoppio

Torniamo alla roulette e giochiamo “rouge”.

Prima o poi vinco: il raddoppio

Torniamo alla roulette e giochiamo “rouge”.

1) Punto 10 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio } = 20 - 10 = 10$$

Prima o poi vinco: il raddoppio

Torniamo alla roulette e giochiamo “rouge”.

1) Punto 10 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio } = 20 - 10 = 10$$

2) Se perdo, gioco 20 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio } = 40 - (10 + 20) = 10$$

Prima o poi vinco: il raddoppio

Torniamo alla roulette e giochiamo “rouge”.

1) Punto 10 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio } = 20 - 10 = 10$$

2) Se perdo, gioco 20 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio } = 40 - (10 + 20) = 10$$

3) Se perdo, gioco 40 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio} = 80 - (10 + 20 + 40) = 10$$

Prima o poi vinco: il raddoppio

Torniamo alla roulette e giochiamo "rouge".

1) Punto 10 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio } = 20 - 10 = 10$$

2) Se perdo, gioco 20 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio } = 40 - (10 + 20) = 10$$

3) Se perdo, gioco 40 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio} = 80 - (10 + 20 + 40) = 10$$

4) Se perdo, gioco 80 €, se vinco mi fermo

$$\text{bilancio} = 160 - (10 + 20 + 40 + 80) = 10$$

Se ho perso n-volte

Gioco 10×2^n €, se vinco mi fermo:

$$\begin{aligned}
\text{vincita} &= 2 \times 10 \times 2^n - \underbrace{\left(10 + 20 + \ldots + 10 \times 2^n\right)}_{n+1 \text{ addendi}} \\
&= 10 \times \left(2^{n+1} - (1 + 2 + \ldots + 2^n)\right) \\
&= 10 \times \left(2^{n+1} - \left(2^{n+1} - 1\right)\right) = 10
\end{aligned}$$

Se ho perso n-volte

Gioco 10×2^n €, se vinco mi fermo:

$$
\begin{aligned}
\text{vincita} &= 2 \times 10 \times 2^n - \underbrace{\left(10 + 20 + \ldots + 10 \times 2^n\right)}_{n+1 \text{ addendi}} \\
&= 10 \times \left(2^{n+1} - (1 + 2 + \ldots + 2^n)\right) \\
&= 10 \times \left(2^{n+1} - \left(2^{n+1} - 1\right)\right) = 10
\end{aligned}
$$

Formula magica

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + 2^n &= (1 + 2 + \ldots + 2^n) \times (2 - 1) \\
&= \left(2 + 4 + \ldots + 2^{n+1}\right) + \\
&\qquad - (1 + 2 + \ldots + 2^n) \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

I soldi non sono infiniti

- Capitale necessario per giocare $n+1$-volte

$$\begin{aligned}\underbrace{10+20+\ldots+10\times 2^n}_{n+1 \text{ addendi}} &= 10\times\left(1+2+\ldots+2^n\right)\\ &= 10\times\left(2^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

I soldi non sono infiniti

- Capitale necessario per giocare $n+1$-volte

$$\underbrace{10 + 20 + \ldots + 10 \times 2^n}_{n+1 \text{ addendi}} = 10 \times (1 + 2 + \ldots + 2^n)$$
$$= 10 \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

- Probabilità di perdere $n+1$-volte

$$\underbrace{(1 - \frac{18}{37}) \times (1 - \frac{18}{37}) \times \ldots (1 - \frac{18}{37})}_{n+1 \text{ volte}} = \left(\frac{19}{37}\right)^{n+1}$$

Quanti soldi devo avere ?

- Vogliamo essere sicuri al 99% di vincere

Quanti soldi devo avere ?

- Vogliamo essere sicuri al 99% di vincere
- La probabilità di perdere deve essere minore di 1%=1/100

$$\left(\frac{19}{37}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{100}$$

Quanti soldi devo avere ?

- Vogliamo essere sicuri al 99% di vincere
- La probabilità di perdere deve essere minore di 1%=1/100

$$\left(\frac{19}{37}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{100}$$

- Passando ai logaritmi

$$\ln\left(\frac{19}{37}\right)^{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

Quanti soldi devo avere ?

- Vogliamo essere sicuri al 99% di vincere
- La probabilità di perdere deve essere minore di 1%=1/100

$$\left(\frac{19}{37}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{100}$$

- Passando ai logaritmi

$$\ln\left(\frac{19}{37}\right)^{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

- Poiché $\ln(a^n) = n \ln a$ e $\ln(N/D) = \ln N - \ln D$

$$(n+1)(\ln 19 - \ln 37) \leqslant (\ln 1 - \ln 100) = -\ln 100$$

Quanti soldi devo avere ?

- n deve essere almeno 6

$$(n+1) \geqslant \frac{\ln 100}{\ln 37 - \ln 19} \simeq 6.9$$

Quanti soldi devo avere ?

- n deve essere almeno 6

$$(n+1) \geqslant \frac{\ln 100}{\ln 37 - \ln 19} \simeq 6.9$$

- Il capitale necessario deve essere pari a

$$10 \times \left(2^{n+1} - 1\right) = 1270\,€$$

Quanti soldi devo avere ?

- n deve essere almeno 6

$$(n+1) \geqslant \frac{\ln 100}{\ln 37 - \ln 19} \simeq 6.9$$

- Il capitale necessario deve essere pari a

$$10 \times \left(2^{n+1} - 1\right) = 1270\,€$$

- Con il lotto per essere sicuri al 50%

$$n+1 \geqslant \frac{\ln 2}{\ln 18 - \ln 17} \geqslant 13 \qquad \text{capitale} \geqslant 80.000\,€$$

Speranza di vincita

Gioco al più $N = n + 1$-volte (mi fermo quando vinco oppure ho finito i soldi)

- Perdo $10 \times (2^N - 1)$ € se "rosso" non esce mai

$$\mathbb{P}\left[\text{“perdo"}\right] = \left(\frac{19}{37}\right)^N$$

Speranza di vincita

Gioco al più $N = n + 1$-volte (mi fermo quando vinco oppure ho finito i soldi)

- Perdo $10 \times (2^N - 1)$ € se “rosso” non esce mai

$$\mathbb{P}\left[\text{“perdo"}\right] = \left(\frac{19}{37}\right)^N$$

- Altrimenti, vinco 10 € perché il “rosso” è uscito

$$\mathbb{P}\left[\text{“vinco"}\right] = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^N$$

Speranza di vincita

Gioco al più $N = n + 1$-volte (mi fermo quando vinco oppure ho finito i soldi)

- Perdo $10 \times (2^N - 1)$ € se "rosso" non esce mai

$$\mathbb{P}\left[\text{``perdo"}\right] = \left(\frac{19}{37}\right)^N$$

- Altrimenti, vinco 10 € perché il "rosso" è uscito

$$\mathbb{P}\left[\text{``vinco"}\right] = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^N$$

- Speranza di vincita

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V\right] &= 10 \times \left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^N\right) - 10 \times (2^N - 1) \times \left(\frac{19}{37}\right)^N \\ &= 10 \times \left(1 - 2^N \times \left(\frac{19}{37}\right)^N\right) = 10 \times \left(1 - \left(\frac{38}{37}\right)^N\right)\end{aligned}$$

Esempio

$$\mathbb{E}\left[V\right] = 10 \times \left(1 - \left(\frac{38}{37}\right)^{N}\right)$$

N	$\mathbb{E}\left[V\right]$	Capitale
1	-0,27	10
2	-0,55	30
3	-0,83	70
4	-1,13	150
5	-1,43	310
6	-1,74	630
7	-2,05	1270
8	-2,38	2550
9	-2,71	5110
10	-3,06	10230

Siti e libri

a) http://www.fatxeilnostrogioco.it/it/

b) http://betxonmath.polximi.it/

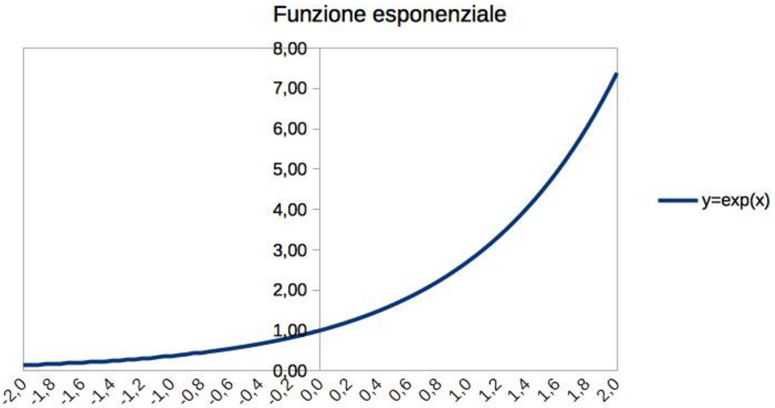
c) Paolo Canova, Diego Rizzuto
Fate il nostro gioco
Add Editore

d) Andrà, C., Parolini, N., Verani, M.
Azzardo e matematica a scuola
Springer, 2016.

Divagazione

Funzione esponenziale

$$y = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e} = 2,718282\ldots$$



Proprietà

- Se x è positivo ed è sufficientemente grande e^{-x} è decisamente piccolo

$$\mathrm{e}^{-2} \simeq 0,13534 \quad \mathrm{e}^{-5} \simeq 0,00674$$

$$\mathrm{e}^{-10} \simeq 0,00005 = \frac{5}{100.000}$$

Proprietà

- Se x è positivo ed è sufficientemente grande e^{-x} è decisamente piccolo

$$\mathrm{e}^{-2} \simeq 0,13534 \quad \mathrm{e}^{-5} \simeq 0,00674$$
$$\mathrm{e}^{-10} \simeq 0,00005 = \frac{5}{100.000}$$

- Poiché

$$\mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b} = \mathrm{e}^{a+b},$$

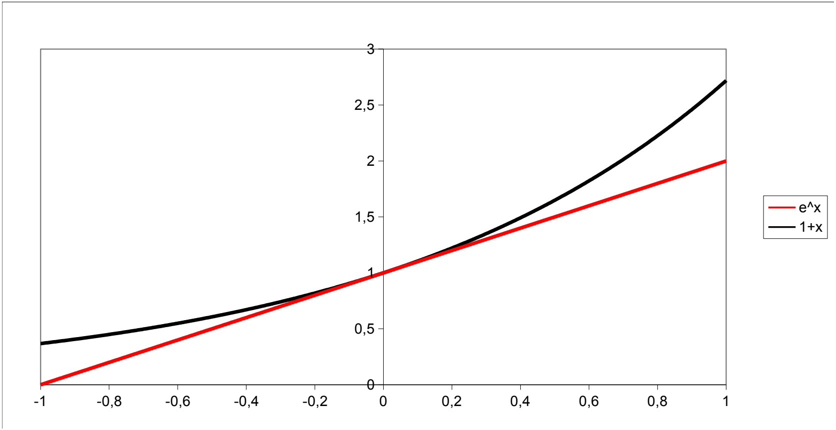
allora se n è un intero

$$(\mathrm{e}^{x})^{n} = \underbrace{\mathrm{e}^{x} \times \ldots \times \mathrm{e}^{x}}_{n \text{ volte}} = \mathrm{e}^{\overbrace{x + x + \ldots + x}^{n \text{ volte}}} = \mathrm{e}^{nx}$$

Proprietà di approssimazione

Se x è vicino a zero

$$e^x \simeq 1 + x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - x \simeq e^{-x}$$



La probabilità è piccola perché ...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\text{“53” non esce da 257 volte}\right] &= \left(1-\frac{1}{18}\right)^{257} \\
(4,7\times 10^{-7}) &\simeq \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{18}}\right)^{257} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{257}{18}} \\
&\simeq 6.210^{-07} \\
(\text{esatto}) &\simeq 4.171949e^{-07}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}\left[\text{“successo" in ritardo di } n\text{-volte}\right] = (1-p)^n \simeq \mathrm{e}^{-np}$$

dove p è la probabilità di successo $p \ll 1$. ▸ Raddoppio